

FINANČNÍ MATEMATIKA

K_0 ... počáteční kapitál (vklady, úvěry)

K_m ... kapitál po m letech (po připravení úroků na m lety) (ok)

m ... počet let

U_m ... úrok na m let

i ... úroková míra (roční) vyj. desítným číslem

- pokud úroková míra je $p\%$, potom $i = \frac{p}{100}$

$$[p = 1,8\% \Rightarrow i = \frac{1,8}{100} = 0,018]$$

k ... kladovací koeficient

- pokud daň z úroků je $d\%$, potom $k = 1 - \frac{d}{100}$

$$[d = 15\% \Rightarrow k = 1 - \frac{15}{100} = 1 - 0,15 = 0,85]$$

- většina banky počítají 12 měsíců po 30 dnech, tj. 360 dní do roku

JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ

- úrok se počítá stále z počátečního kapitálu

$$K_m = K_0 (1 + mki)$$

$$U_m = mkiK_0$$

- kapitál a úrok po t dnech

$$K = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)$$

$$U = \frac{t}{360} \cdot k \cdot i \cdot K_0$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{pro } t = 360 \text{ dní} \Rightarrow U = kiK_0 \\ t = 180 \text{ dní} (= \frac{1}{2} \text{ roku}) \Rightarrow U = \frac{180}{360} kiK_0 = \frac{1}{2} kiK_0 \\ t = 1 \text{ měsíc} = 30 \text{ dní} \Rightarrow U = \frac{1}{12} kiK_0 \text{ atd.} \end{array} \right]$$

SLOŽENÉ ÚROČENÍ

- úrok se na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě kapitálu a spolu s ním se dále úročí

$$K_m = K_0 (1 + ki)^m$$

$$U_m = K_0 [(1 + ki)^m - 1]$$

- kapitál K_m a úrok U_m po m úrokovacích obdobích (po připravení úroků na m -lé období), úrokovací období t dní

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m$$

$$U_m = K_0 \left[\left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m - 1\right]$$

POČET DNÍ podle datumů

$$L = (m_2 - m_1) \cdot 30 + (d_2 - d_1) \quad \left[\text{NEBO "kuřní" (1 den se neúročí)} \right]$$

$$[\text{od } 4.2. \text{ do } 17.11. \text{ l.l.} \quad L = (11-2) \cdot 30 + (17-4) = 270 + 13 = 283 \text{ d}]$$

- úročí se den vkladu, nebo splatnosti

Příklady

JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ

- ① Uložíme 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí nám banka na úrocích za jeden rok? Kolik Kč bude úrok po zdanění 15 %?

Necháme náš vklad v bance po dobu 5 let a úroky si nenecháme připsovat ke vkladu, ale posílat na běžný účet. Určete, kolik Kč budeme mít vždy na konci roku?

$$K_0 = 50\,000 \text{ Kč} \quad p = 3\% \Rightarrow i = \frac{p}{100} = 0,03 \quad d = 15\% \Rightarrow k = 1 - \frac{d}{100} = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$\text{úrok na 1. rok} \quad U_1 = 50\,000 \cdot 0,85 \cdot 0,03 = 1275 \text{ Kč}$$

$$U_1 = K_0 \left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot k \cdot i = k \cdot i \cdot K_0$$

$$\text{po 1. roce} \quad K_1 = K_0 + U_1 = 50\,000 + 0,85 \cdot 0,03 \cdot 50\,000 = 51\,275 \text{ Kč}$$

$$= 50\,000 (1 + 0,85 \cdot 0,03)$$

$$\text{po 2. roce} \quad K_2 = K_1 + U_1 = K_0 + U_1 + U_1 = K_0 + 2U_1 = 50\,000 + 2 \cdot 0,85 \cdot 0,03 \cdot 50\,000 =$$

$$= 50\,000 (1 + 2 \cdot 0,85 \cdot 0,03) = 52\,550 \text{ Kč}$$

$$\text{po 3. roce} \quad K_3 = K_2 + U_1 = K_0 + 2U_1 + U_1 = K_0 + 3U_1 = 50\,000 + 3 \cdot 0,85 \cdot 0,03 \cdot 50\,000 =$$

$$= 50\,000 (1 + 3 \cdot 0,85 \cdot 0,03) = 53\,825 \text{ Kč}$$

$$K_m = K_0 + mU_1 = K_0 + m \cdot k \cdot i \cdot K_0 = K_0 (1 + m \cdot k \cdot i)$$

$$\text{po 4. roce} \quad K_4 = K_3 + U_1 = K_0 + 4U_1 = K_0 + 4K_0 k \cdot i = K_0 (1 + 4k \cdot i) =$$

$$= 50\,000 (1 + 4 \cdot 0,85 \cdot 0,03) = 55\,100 \text{ Kč}$$

$$\text{po 5. roce} \quad K_5 = K_4 + U_1 = K_0 + 5U_1 = K_0 (1 + 5k \cdot i) = 50\,000 (1 + 5 \cdot 0,85 \cdot 0,03) =$$

$$= 56\,375 \text{ Kč}$$

[5krát jsme dostali úrok 1275 Kč.]

Příklad je typem (nejjednodušším) jednoduchého úrokování – úrok se nepřidává k vložené částce a banka ho dále neúročí. Chování vkladatele v předchozím příkladu je příkladem rentiérského chování – vložíme do banky určitou částku a žijeme z úroků.

- ② Jakou částku by bylo nutné uložit v bance na úrok 3 %, aby roční úrok dosáhl 360 000 Kč (tedy 30 000 Kč na měsíc, je-li úrok zdaněn 15 %)?

1. kř. roční úrok 360 000 Kč $p = 3\% \Rightarrow i = 0,03 \quad k = 1 - \frac{15}{100} = 0,85$

$$K_0 \cdot 0,85 \cdot 0,03 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 360\,000 = 0,85 \cdot 0,03 K_0$$

[kde K_0 je částka, kterou máme, např. x.] $K_0 = \frac{360\,000}{0,85 \cdot 0,03}$

2. kř. $U = K_0 k \cdot i$ $K_0 = 14\,117\,647 \text{ Kč}$

120REC $K_0 = \frac{U}{k \cdot i} = \frac{360\,000}{0,85 \cdot 0,03}$

$$K_0 = 14\,117\,647 \text{ Kč}$$

- ③ Podnikatel uložil na termínovaný vklad na půl roku 80 000 Kč při roční úrokové míře 7 %. Kolik Kč mu bude vyplaceno, jestliže úrok je zdaněn 15 %?

1. kř. $K_0 = 80\,000 \text{ Kč} \quad p = 7\% \Rightarrow i = 0,07 \quad \text{zdan. koef. } k = \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85$

úrokovací obd. JEN 1/2 roku (180 dnů) ... $\frac{t}{360} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$

úrok (poměrná část ročního) $U = 80\,000 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot \frac{1}{2} = 2\,380 \text{ Kč}$

vypláceno $K = K_0 + U = (80\,000 + 2\,380) \text{ Kč} = 82\,380 \text{ Kč}$

2. kř. $K = K_0 + U = K_0 + K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right) \quad U = \frac{t}{360} \cdot k \cdot i \cdot K_0$

120REC $K = 80\,000 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,85 \cdot 0,07\right) = 82\,380 \text{ Kč}$

- ④ Určete výši úroku, kterou požaduje banka za půjčení částky 12 000 Kč na 6 měsíců při úrokové míře 13 % za rok.

$$K_0 = 12\,000 \text{ Kč} \quad \text{úrok. obd. 6 mř. (1/2 roku, 180 dní)} \quad \frac{t}{360} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{6}{12}\right)$$

$$p = 13\% \Rightarrow i = 0,13$$

$$U = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}$$

$$U = 12\,000 \cdot 0,13 \cdot \frac{1}{2}$$

$$U = 12\,000 \cdot 0,13 \cdot 0,5 = \underline{780 \text{ Kč}}$$

úroč. koef. $k = 1 - \text{NIC NĚM NEZDANUVI}$
 ! PŘI PŮJČCE (nemusíme k psát)

- ⑤ Pan Novák si 14. března půjčil 20 000 Kč na roční úrok 14 %. Kolik Kč bude muset zaplatit 25. srpna téhož roku?

$$K_0 = 20\,000, \quad p = 14\% \Rightarrow i = 0,14 \quad k = 1 \text{ (můžeme se)}$$

14. března a 25. srpna (1 den se počítá) $\Rightarrow$ určit počet dní (1 měsíc... 30 dní)

	B	D	K	Č	Č	S
(3. místo)	17	30	30	30	30	24 (1. měsíce)

$$\Rightarrow L = 161 \text{ dní}$$

$$K = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)$$

$$K = 20\,000 \left(1 + \frac{161}{360} \cdot 0,14\right)$$

$$K = 20\,000 \cdot 1,0626$$

$$K = \underline{21\,252 \text{ Kč}}$$

počet dní lze určit i takto: $L = 30(m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$ m_2 ... pořadí měsíců, d_2 ... den
 $L = 30(8 - 3) + (25 - 14) = 30 \cdot 5 + 11 = 161 \text{ dní}$

- ⑥ Pan Adam splatil úvěr a úroky částkou 445 000 Kč. Půjčka byla splacena po 270 dnech a to při ročním úroku 15 %. Jak velký úvěr si vzal pan Adam?

$$K = 445\,000 \text{ Kč} \quad L = 270 \text{ d} \quad p = 15\% \Rightarrow i = 0,15 \quad k = 1 \text{ (můžeme se)}$$

$$K = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right) \Rightarrow \frac{t}{360} = \frac{270}{360} = \frac{3}{4}$$

$$K = K_0 \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 0,15\right)$$

$$K_0 = \frac{K}{1 + \frac{3}{4} \cdot 0,15} = \frac{445\,000}{1 + 0,75 \cdot 0,15} = \underline{400\,000 \text{ Kč}}$$

Jednoduché úročení

$$K_m = K_0 + mU \quad U = mkiU_0 \text{ po m letech}$$

$$K_m = K_0 + mK_0ki$$

$$K_m = K_0(1 + mki)$$

po t dnech $K = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} ki\right) \quad U = K_0 \frac{t}{360} ki$ - pokud kratší doba než 1 rok $\Rightarrow$ úrok je poměrná část ročního úroku

k ... úroč. koef. (d ... dní, r ... %)
 $k = 1 - \frac{d}{100}$
 i ... roční úv. míra
 $i = \frac{p}{100}$ (p ... %)

Další pojmy

Jednoduché úročení – aritmetická posloupnost s prvním členem K_0 a diferencí

dluhopis – cenný papír, kterým se dlužník zavazuje jeho majiteli, že mu splatí dlužnou částku včetně úroku ve stanovených termínech, dluhopisy vydává stát, města, obce, podniky

termínovaný vklad – typ vkladu, jehož doba splatnosti může být několik dnů až několik let, vkladatel nemůže bez sankcí po sjednanou dobu vložený kapitál vyzvednout

termínovaný vklad s revolvingem – termínovaný vklad, který může být po uplynutí sjednané doby trvání vkladu automaticky prodloužen na další stejně dlouhou dobu (pokud vkladatel nedá výpověď)

SLOŽENÉ ÚROČENÍ

- úroková doba je rovna aspoň dvěma celým úrokovacím obdobím
- úroky se nevybírají, ale přičítají k počátečnímu kapitálu a společně s ním se úročí úrokovací období 1 rok

$$K_n = K_0(1 + ki)^n \quad U_n = K_0[(1 + ki)^n - 1]$$

úrokovací období t dní

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} ki\right)^m \quad U_m = K_0 \left[\left(1 + \frac{t}{360} ki\right)^m - 1\right]$$

- ① Uložíme na termínovaný vklad na tři roky 20 000 Kč s roční úrokovou mírou 2,5 %, daň z úroku je 15 %. Kolik korun nám banka po třech letech vyplátí.

ndarň. koef.
 $K_0 = 20\,000 \text{ Kč}$ $p = 2,5\% \Rightarrow i = 0,025\%$ $d = 15\% \Rightarrow k = 1 - 0,15 = 0,85$
odroz. měsíci (1. q.)

1. rok $K_1 = 20\,000 + 0,85 \cdot 0,025 \cdot 20\,000 = 20\,000(1 + 0,85 \cdot 0,025) = 20\,425 \text{ Kč}$
 $K_1 = K_0(1 + ki)$

2. rok $K_2 = 20\,425 + 0,85 \cdot 0,025 \cdot 20\,000 = 20\,425(1 + 0,85 \cdot 0,025) = 20\,859 \text{ Kč}$
 $[= 20\,000(1 + 0,85 \cdot 0,025)(1 + 0,85 \cdot 0,025)]$
 $[= 20\,000 \cdot (1 + 0,85 \cdot 0,025)^2]$ $K_2 = K_0(1 + ki)^2$

3. rok $K_3 = 20\,859 + 0,85 \cdot 0,025 \cdot 20\,859 = 20\,859(1 + 0,85 \cdot 0,025) = 21\,302 \text{ Kč}$
 $[= 20\,000(1 + 0,85 \cdot 0,025)^3]$ $K_3 = K_0(1 + ki)^3$

obecně: $K_m = K_0(1 + ki)^m$ $U = K_m - K_0 = K_0(1 + ki)^m - K_0 = K_0[(1 + ki)^m - 1]$

- dosaz. (2. q.) do rovnice $K_3 = K_0(1 + 0,85 \cdot 0,025)^3 = 20\,000(1 + 0,85 \cdot 0,025)^3 = 21\,302 \text{ Kč}$

- ② Jak velký vklad vzroste za 15 let na 1 346 000 Kč, je-li čistý úrok 2 %?

$K_{15} = 1\,346\,000 \text{ Kč}$ $p = 2\% \Rightarrow i = 0,02$ *čistý úrok* $\Rightarrow k = 1$ (*nikd neudán*)

$K_m = K_0(1 + ki)^m$ $\Rightarrow K_0 = \frac{K_{15}}{(1 + 0,02)^{15}}$

$K_{15} = K_0(1 + 0,02)^{15}$ $K_0 = \frac{1\,346\,000}{1,02^{15}} = 1\,000\,098 \text{ Kč} \approx 1\,000\,000 \text{ Kč}$

- ③ Vložíme na počátku roku na termínovaný vklad na 2 roky částku 32 000 Kč. Roční úroková míra je 9,5 %. Jak vysokou částku budeme mít na konci druhého roku, jestliže si v průběhu celé doby nevybíráme úroky a je-li úrokovací období

a) 1 rok b) polovina roku c) čtvrt roku d) 1 měsíc? $K_0 = 32\,000 \text{ Kč}$ $p = 9,5\% \Rightarrow i = 0,095$

a) úrok. obd. 1 rok $\Rightarrow$ počet úročení na 2 roky $m = 2$

$K_2 = K_0(1 + ki)^2 = 32\,000(1 + 0,85 \cdot 0,095)^2 = 37\,377 \text{ Kč}$

b) úrok. obd. $\frac{1}{2}$ roku $\Rightarrow$ počet úročení na 2 roky $m = 4$, $\frac{t}{360} = \frac{1}{2}$

$K_4 = K_0(1 + ki \cdot \frac{1}{2})^4 = 32\,000(1 + 0,85 \cdot 0,095 \cdot \frac{1}{2})^4 = 37\,489 \text{ Kč}$

c) úrok. obd. $\frac{1}{4}$ roku $\Rightarrow \frac{t}{360} = \frac{3 \cdot 30}{360} = \frac{1}{4}$, počet úročení $m = 8$

$K_8 = K_0(1 + ki \cdot \frac{1}{4})^8 = 32\,000(1 + 0,85 \cdot 0,095 \cdot \frac{1}{4})^8 = 37\,548 \text{ Kč}$

d) úrok. obd. 1 měsíc $\Rightarrow \frac{t}{360} = \frac{1}{12}$, počet úročení $m = 24$

$K_{12} = K_0(1 + ki \cdot \frac{1}{12})^{24} = 32\,000(1 + 0,85 \cdot 0,095 \cdot \frac{1}{12})^{24} = 37\,588 \text{ Kč}$

- ④ Uložíme na počátku roku na termínovaný vklad na dva roky s úrokovou mírou 4,55 % částku 420 000 Kč. Úrokovací období je 1 měsíc, daň z úroku je 15 %.

a) Kolik korun obdržíme v den splatnosti vkladu?

b) Kolik korun činil úrok po zdanění?

$$\begin{aligned}
 p &= 4,55\% \Rightarrow i = 0,0455 & K_0 &= 420\,000 \text{ Kč} & \text{úrok. obd. 1 měsíc} &\Rightarrow \frac{1}{360} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12} \\
 & & & & \text{vklad na 2 roky} &\Rightarrow m = 24 \\
 & & & & & \text{(24 měsíců)} \\
 K_m &= K_0 \left(1 + k_i \cdot \frac{1}{360}\right)^m & \text{daněv. koef. } k &= 1 - \frac{15}{100} = 0,85 \\
 K_{24} &= 420\,000 \left(1 + 0,85 \cdot 0,0455 \cdot \frac{1}{12}\right)^{24} \\
 K_{24} &= 453\,720 \text{ Kč} & U_{24} &= K_m - K_0 \\
 & & U_{24} &= 453\,720 - 420\,000 = 33\,720 \text{ Kč}
 \end{aligned}$$

PRAVIDELNÉ SPLÁCENÍ DLUHU

D ... počáteční výše dluhu

m ... počet splátek

s ... výše splátky placené vždy na konci úrokovacího období

$$s = D \cdot q^m \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}, \quad \text{kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot i$$

- ① Úvěr na byt 2 000 000 Kč na 15 let s roční úrokovou mírou 3 %. Jaká je měsíční splátka? Kolik celkem zaplatíme?

$$\begin{aligned}
 D &= 2\,000\,000 \text{ Kč} & 15 \text{ let} & p = 3\% \Rightarrow i = 0,03 & \text{úv. obd. } \frac{1}{360} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12} \\
 & & \text{splácíme 15 let po 1 měs.} & \Rightarrow m = 15 \cdot 12 = 180 \text{ splátek} \\
 D &= D q^m \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1} & q &= 1 + \frac{1}{360} \cdot i = 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,03 = 1,0025 \\
 s &= 2\,000\,000 \cdot 1,0025^{180} \cdot \frac{1,0025 - 1}{1,0025^{180} - 1} \\
 s &= 13\,810 \text{ Kč}
 \end{aligned}$$

- ② Při půjčce 10+1 zaplatíme pouze desetinu ceny a pak deset dalších splátek ve stejné výši (tedy 110 % běžné prodejní ceny). Porovnejte výhodnost tohoto typu půjčky na novou LCD televizi v prodejní ceně 20 000 Kč s klasickým bankovním úvěrem s roční úrokovou mírou 15 % a deseti měsíčními splátkami s úrokovacím obdobím 1 měsíc.

$$\begin{aligned}
 &\text{splácení 10+1} \\
 &- \text{zaplatíme 110\% ceny} \dots 22\,000 \text{ Kč} \\
 &\left[\begin{array}{l} \frac{1}{10} \times 20\,000 \text{ Kč} \dots 2\,000 \text{ Kč} \\ + 10 \times 22\,000 \text{ Kč} \dots 220\,000 \text{ Kč} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

bankovní úvěr

$$\begin{aligned}
 p &= 15\% \Rightarrow i = 0,15 & D &= 20\,000 \text{ Kč} & \text{počet splátek } m &= 10 \\
 & & & & \text{úrok. obd. } \frac{1}{360} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12} \text{ (měsíční)} \\
 s &= D q^m \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1} & q &= 1 + \frac{1}{360} \cdot i = 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,15 = 1,0125 \\
 s &= 20\,000 \cdot 1,0125^{10} \cdot \frac{1,0125 - 1}{1,0125^{10} - 1} \\
 s &= 2140 \text{ Kč} & & \text{zaplatíme } 10 \times 2140 = 21\,400 \text{ Kč}
 \end{aligned}$$

- výhodnější je bank. úvěr (máme začít splácet až po 1 měsíci)